1. (a) Escribe la afirmación recíproca de "Si un número es múltiplo de 3 y de 5, lo es de 15". ¿Es cierta dicha recíproca? (1 punto).

Solución:

La afirmación recíproca es: "Si un número es múltiplo de 15, lo es de 3 y de 5"; también es cierta.

- (b) Demuestra que la suma de los n primeros números impares es n^2 (2 puntos).

Solución: Puede hacerse varias pruebas¹; aquí optamos por inducción sobre n :

$n = 1$: La afirmación es $1 = 1^2$.

$n > 1$:

Observemos que los números impares son de la forma $2k - 1, k = 1, 2, \dots$

Luego

$$1 + \dots + (2n-1) = (1 + \dots + (2(n-1)-1)) + (2n-1) \stackrel{\text{ind}}{=} (n-1)^2 + (2n-1) = n^2$$

2. Dados dos enteros (a, b) describe, en el lenguaje que estimes oportuno, un procedimiento para encontrar una terna de enteros (d, u, v) tal que

$$d = ua + vb \text{ es el máximo común divisor de } a \text{ y } b \text{ (5 puntos)}$$

Aplica tu procedimiento al par $(64, 28)$ (5 puntos).

Solución:

Un procedimiento se describe en la p. 38 del libro de texto.

Para el par $(64, 28)$ los cálculos son:

i	q_i	r_i	r_{i+1}	u_i	u_{i+1}	v_i	v_{i+1}
0		64	28	1	0	0	1
1	2	28	8	0	1	1	-2
2	3	8	4		-3		7
3	2		0				

Es decir, $d = 4, u = -3, v = 7$.

3. (a) Define el concepto de núcleo de una aplicación lineal y pon un ejemplo de dicho concepto (2 puntos).

Solución: El concepto está definido en la p. 117 del libro de texto.

Puestos a elegir, un ejemplo lo elijo sencillo. Como aplicación lineal tomo la identidad:

$$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad (a, b) \mapsto (a, b)$$

cuyo núcleo es, obviamente, el vector $(0, 0)$.

¹la más clásica, la suma de una progresión aritmética

- (b) Define el concepto de base ortonormal en un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle, \rangle)$ (1 punto), y calcula una base ortonormal en $(\mathbf{R}^2, \langle, \rangle)$ donde

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = \int_0^1 (ax + b)(cx + d) dx \quad (4 \text{ puntos})$$

Solución: El concepto está en la definición 27.3 de la p.129 del libro de texto.

Para nuestro caso, aplicamos Gram-Schmidt a la base $(1, 0), (0, 1)$, teniendo cuidado con el producto escalar, que no es el ordinario, sino

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = \int_0^1 (ax + b)(cx + d) dx = 1/3 ac + 1/2 bc + 1/2 ad + bd$$

Sustituimos el vector $(0, 1)$ por $t(1, 0) + (0, 1) = (t, 1)$ y calculamos t para que $\langle (1, 0), (t, 1) \rangle = 0$:

$$\langle (1, 0), (t, 1) \rangle = 1/3 t + 1/2 = 0 \implies t = -3/2$$

Así, el par $((1, 0), (-3/2, 1))$ es ortogonal. También lo es el par² $((1, 0), (-3, 2))$

Las normas respectivas son

$$+\sqrt{\langle (1, 0), (1, 0) \rangle} = \frac{1}{+\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad +\sqrt{\langle (-3, 2), (-3, 2) \rangle} = 1$$

Por tanto, la base ortonormal es

$$((\sqrt{3}, 0), (-3, 2))$$

4. ESTE PROBLEMA HAZLO Y ENTREGALO EN FOLIO(S) APARTE.

En el espacio afín euclídeo $\mathbf{R}^3$:

- (a) Calcula las ecuaciones implícitas de la variedad afín D , de menor dimensión, que pasa por los puntos $P = (2, 0, 1)$, $Q = (1, 1, 1)$ y $R = (0, 0, 1)$ (2 puntos).
- (b) Indica cuál es la dirección T de la variedad afín de ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x + z & = & 2 \\ y & = & 1 \end{cases}$$

(1 punto).

- (c) Obtén la ecuación de la proyección π con base D y dirección T (5 puntos).
- (d) ¿Es π una proyección ortogonal? ¿Por qué? (1 punto).
- (e) Indica una recta cuya imagen por π sea un único punto (1 punto).

Solución:

²más simple

- (a) La dirección de la variedad D contiene al menos los vectores $\overrightarrow{RP} = (2, 0, 0)$ y $\overrightarrow{RQ} = (1, 1, 0)$. Puesto que estos vectores son libres, su dimensión es, al menos, dos. El plano $R + \mathbf{R} \langle \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ} \rangle$ contiene a los tres puntos y es, por minimalidad de la dimensión, D .

Su ecuación es

$$\begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \sim z = 1$$

- (b) La dirección de T se calcula, por ejemplo, con el núcleo de la matriz de coeficientes

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \langle (1, 0, -1) \rangle$$

- (c) Para calcular la ecuación de la proyección $Y = a + AX$, recordemos que en a tenemos la proyección de $(0, 0, 0)$. Ahora bien, dicha proyección es

$$\pi(0, 0, 0) = D \cap ((0, 0, 0) + T) = D \cap \mathbf{R} \langle (1, 0, -1) \rangle$$

es decir, la solución del sistema

$$\begin{cases} z & = & 1 \\ x + z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases} \sim x = -1, y = 0, z = 1$$

Por tanto, $a = (-1, 0, 1)$.

La matriz A es la m.c. en bases canónicas de $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por

$$f(2, 0, 0) = (2, 0, 0) \quad f(1, 1, 0) = (1, 1, 0) \quad f(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

Así

$$f(1, 0, 0) = 1/2 f(2, 0, 0) = 1/2 (2, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$f(0, 1, 0) = f(1, 1, 0) - f(1, 0, 0) = (1, 1, 0) - (1, 0, 0) = (0, 1, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3$$

$$f(0, 0, 1) = f(1, 0, 0) - f(1, 0, -1) = (1, 0, 0) - (0, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (d) No se trata de una proyección ortogonal, pues la dirección de T no es ortogonal³ a la de la base D .

- (e) Cualquier recta paralela a T , es decir, la propia T .

Elige uno de los dos problemas siguientes

³basta efectuar el producto escalar de los vectores directores

5. Don Agapito, gran broker, desea invertir un viernes en acciones de determinada compañía. Para ello, la víspera, jueves por la tarde, analiza las variaciones de esos 4 primeros días de la semana. Los resultados publicados por internet son: Lunes 2 puntos, Martes -1 punto, Miércoles 1 punto y jueves 2 puntos. A continuación, Don Agapito llama a Don Gervasio, ilustre matemático amigo suyo, para que le prediga si debe o no invertir.

Este le pide tiempo para hacer sus cuentas.

- ¿Qué polinomio calcula Don Gervasio? (8 puntos)
- ¿Cuál será la recomendación de Don Gervasio a Don Eustaquio? (2 puntos).

Indicación: Interpola los puntos $(1, 2)$, $(2, -1)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$

Solución:

- Don Gervasio, desea calcular el polinomio f interpolador de grado menor o igual que 3, que pasa por los puntos $(\text{Lunes}, 2), (\text{Martes}, -1), (\text{Miércoles}, 1), (\text{Jueves}, 2)$ que formula como

$$f(1) = 2, f(2) = -1, f(3) = 1, f(4) = 2$$

Al efecto, Don Gervasio resuelve el sistema de congruencias

$$\begin{cases} f \equiv 2 & \text{mod } x - 1 \\ f \equiv -1 & \text{mod } x - 2 \\ f \equiv 1 & \text{mod } x - 3 \\ f \equiv 2 & \text{mod } x - 4 \end{cases}$$

Siguiendo nuestro procedimiento⁴ los cálculos serán

k	a_k	b_k	G	u	h	f
0	1	2	1			2
1	2	-1	$x - 1$	1	-3	$-3x + 5$
2	3	1	$x^2 - 3x + 2$	1/2	5/2	$5/2 x^2 - 21/2 x + 10$
3	4	2	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	1/6	-1	$-x^3 + 17/2 x^2 - 43/2 x + 16$

obteniendo el polinomio $f = -x^3 + 17/2 x^2 - 43/2 x + 16$.

- Ahora la variación en bolsa prevista para el viernes es $f(5) = -4$. Por tanto, las acciones bajarán 4 puntos. ¡Mejor esperar al lunes!
6. La migración de la población entre Santander y la provincia de un año para otro se estima de la siguiente manera:
- Cada año el 75% de la población de la provincia migra a Santander
 - Cada año el 50% de Santander migra a la provincia.

⁴el lector puede seguir el que estime oportuno, a sabiendas de que el resultado es único

Intentando prever en un futuro el reparto de población en la capital y resto de la comunidad autónoma, se pide:

- Designando por S_n y P_n las poblaciones respectivas en Santander y provincia en el año n -simo, establecer un sistema de ecuaciones que relacione los datos S_n, P_n con S_0, P_0 (3 puntos) .
- Suponiendo que $S_0 = 100000$ y $P_0 = 50000$, calcular los valores S_{35}, P_{35} (5 puntos).
- ¿Se vaciará la provincia a largo plazo? Razona tu contestación (2 puntos).

Solución:

- Las ecuaciones, ya en forma matricial, que regulan el cambio de un año al siguiente son:

$$\begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{n-1} \\ P_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} S_n \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} S_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

- Luego,

$$\begin{pmatrix} S_{35} \\ P_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^{35} \begin{pmatrix} 100000 \\ 50000 \end{pmatrix}$$

Para calcular $\begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^{35}$, llamamos A a la matriz y observamos que

$$\det(xI - A) = x^2 - 3/4x - 1/4 = (x - 1)(x + 1/4)$$

Ahora

$$V(1) = \mathcal{N}(I - A) = \langle (3, 2) \rangle \quad V(-1/4) = \mathcal{N}(-1/4I - A) = \langle (-1, 1) \rangle$$

Luego,

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1}AP = \text{diag}[1, -1/4]$$

Por tanto,

$$A^{35} = P \text{diag}[1, -1/4^{35}] P^{-1} \sim P \text{diag}[1, 0] P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} S_{35} \\ P_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100000 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90000 \\ 60000 \end{pmatrix}$$

- Por último, al cabo de muchos años, digamos m ,

$$A^m = P \text{diag}[1, -1/4^m] P^{-1}$$

Si m es grande, como antes la matriz diagonal es la $\text{diag}[1, 0]$ y se tiene

$$A^m \sim P \text{diag}[1, 0] P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} S_m \\ P_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100000 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90000 \\ 60000 \end{pmatrix}$$

Las poblaciones quedan estables. ¡Por fortuna, la provincia no se despobla!